DM n°7 : Corrigé

1) Supposons par l'absurde qu'une telle matrice B existe. Comme $B^2 = A$, on en déduit que :

$$\begin{cases} a^2+bc=-1 \\ ab+bd=0 \\ ca+dc=0 \\ d^2+bc=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+bc=-1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ d^2+bc=-2 \end{cases}$$

- Si $a+d \neq 0$, alors la seconde ligne entraine $b=0$. Donc $a^2=-1$, contradiction car a est un réel.
- Si $a+d=0$, alors $d=-a$ et en particulier $a^2=d^2$. Ainsi,

$$-1 = a^2+bc = d^2+bc = -2$$

contradiction.

2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Comme A est toute-puissante, il existe une matrice B telle que $A = B^p$. Or, A' est semblable à A donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = PAP^{-1}$. Ainsi,

$$A' = PB^pP^{-1} = \underbrace{PBP^{-1}PBP^{-1}\ldots PBP^{-1}}_{p \text{ fois}}$$

On pose alors $B' = PBP^{-1}$, de sorte que $A' = (B')^p$. Donc A' est toute-puissante.

3) (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) Comme $\mathcal{B}_c$ est canonique, on a immédiatement $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tandis qu'un calcul d'inverse matriciel donne :

$$P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c} = \left(P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) &= P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Tout d'abord, montrons que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est toute-puissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{\frac{1}{p}} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{\frac{1}{p}} \end{pmatrix}$$

Comme B est diagonale, on obtient $B^p = \begin{pmatrix} 1^p & 0 & 0 \\ 0 & \left(2^{\frac{1}{p}}\right)^p & 0 \\ 0 & 0 & \left(3^{\frac{1}{p}}\right)^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est toute-puissante.

Par la question 2), on en déduit que toute matrice semblable à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est toute-puissante. En particulier, la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$ l'est également. D'où le résultat voulu.

4) (a) Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f^k)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}\,(f^{k+1})$, i.e. $f^{k+1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$.
Or, $f^k(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car f est linéaire. D'où $x \in \mathrm{Ker}\,(f^{k+1})$, ce qui conclut.

(b) Supposons par l'absurde que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathrm{Ker}\,(f^m) \neq \mathrm{Ker}\,(f^{m+1})$. Comme $\mathrm{Ker}\,(f^m) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{m+1})$ par la question précédente, on a en particulier $\dim \mathrm{Ker}\,(f^m) \leq \dim \mathrm{Ker}\,(f^{m+1})$, mais comme ces deux espaces ne sont pas égaux, on a en particulier

$$\dim \mathrm{Ker}\,(f^m) < \dim \mathrm{Ker}\,(f^{m+1})$$

et ce pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la suite $(\dim \mathrm{Ker}\,(f^m))_{m \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'entiers strictement croissante. Or, comme $\mathrm{Ker}\,(f^m) \subset \mathbb{R}^n$, cette suite est majorée par n. On en déduit une contradiction (une suite d'entiers croissante majorée est stationnaire, donc ne peut être strictement croissante).

(c) On raisonne par récurrence forte sur ℓ.

- Initialisation : si $\ell = k_0$, alors il est clair que $\mathrm{Ker}\,(f^\ell) = \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$.
- Hérédité : soit $\ell \geq k_0$. On suppose que

$$\mathrm{Ker}\,(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}\,(f^{k_0+1}) = \ldots = \mathrm{Ker}\,(f^\ell)$$

Montrons que $\mathrm{Ker}\,(f^{\ell+1}) = \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$. Tout d'abord, par la question 4)a, on a $\mathrm{Ker}\,(f^\ell) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{\ell+1})$, donc $\mathrm{Ker}\,(f^{k_0}) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{\ell+1})$. Réciproquement, soit $x \in \mathrm{Ker}\,(f^{\ell+1})$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$. On a $f^{\ell+1}(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$, et donc

$$f^\ell(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

c'est-à-dire que $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(f^\ell)$. Par hypothèse de récurrence, on a donc $f(x) \in \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$, i.e. $x \in \mathrm{Ker}\,(f^{k_0+1})$. Or, par définition de k_0, on a $\mathrm{Ker}\,(f^{k_0+1}) = \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$. Par conséquent, $\mathrm{Ker}\,(f^{k_0}) = \mathrm{Ker}\,(f^{\ell+1})$.

- Finalement, pour tout $\ell \geq k_0$, on a montré que $\text{Ker}\,(f^\ell) = \text{Ker}\,(f^{k_0})$.

(d) Par la question 4)a, la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De plus, par la question 4)c, la suite (u_k) est stationnaire à partir du rang k_0. Enfin, par construction de k_0 (question 4)b), pour tout entier $k < k_0$, on a $u_k < u_{k+1}$, donc $u_1 < u_2 < \ldots < u_{k_0}$.

(e) Comme $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'entiers, on a pour tout $k \in [\![1, k_0-1]\!]$ $u_{k+1} \geq u_k + 1$. Par récurrence immédiate, on en conclut que $u_{k_0} \geq u_1 + (k_0 - 1)$. Supposons par l'absurde que $k_0 > n$, i.e. $k_0 \geq n+1$. On a alors $u_{k_0} \geq u_1 + n$. Comme par ailleurs (u_k) est majorée par n, on a

$$u_1 + n \leq u_{k_0} \leq n$$

et donc, comme u_1 est positif, on en déduit que $u_1 = 0$. Cela revient à dire que $\dim \text{Ker}\,(f) = 0$. Donc $\text{Ker}\, f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Ainsi f est injective. Mais comme la composée d'applications injectives est injective, on en déduit que f^2 est injective, donc $u_2 = 0 = u_1$. Ainsi, $k_0 = 1$. Or, par hypothèse $n \in \mathbb{N}^*$ et $k_0 > n$, ce qui contredit le fait que k_0 =1. Finalement, $k_0 \leq n$.

(f) Par hypothèse, N^r est la matrice nulle. Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^r) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)^r = N^r = 0_{n,n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)})$$

Par bijectivité de l'application $g \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g)$, on en conclut que f^r est le morphisme nul. En particulier, $\text{Ker}\,(f^r) = \text{Ker}\,(0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}) = \mathbb{R}^n$.

(g) Par ce qui précède, on a $u_r = n$. De plus, comme $f^r = 0_{\mathbb{R}^n}$, on a aussi $f^{n+r} = 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $u_{n+r} = n$.

Or, par les questions précédentes, il existe un entier $k_0 \leq n$ tel que $u_{k_0} = u_{k_0+1} = \ldots$ En particulier, comme $n + r \geq k_0$, on en déduit que $u_{k_0} = u_{r+n} = n$. Donc, comme $n \geq k_0$, on a aussi $u_n = u_{k_0} = n$. Ainsi, $\dim \text{Ker}\,(f^n) = n$, ou encore f^n est le morphisme nul. Ainsi, $N^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f^n)$ est la matrice nulle.

5) On notera 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A nilpotente et toute-puissante. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0$. Comme A est toute-puissante, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que$A = B^n$. En particulier

$$A^r = B^{nr} = 0$$

On en conclut que B est nilpotente (car $B^{r'} = 0$ avec $r' = nr$). Par la question 4), on en conclut que $B^n = 0$. Ainsi, $A = B^n = 0$.